Cumhuriyet Science Journal
CSJ

e-ISSN: 2587-246X
ISSN: 2587-2680

Cumhuriyet Sci. J., Vol.38-3 (2017) 557-562

Lucas Sayıları ve Sonsuz Toeplitz Matrisleri Üzerine Bir Uygulama

Murat KARAKAŞ [1]****, Hasan KARABUDAK*** [1]

[1] *İstatistik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Bitlis Eren Üniversitesi, Bitlis, Türkiye*

Received: 09.03.2017; Accepted: 17.05.2017 *http://dx.doi.org/10.17776/csj.340510*

Özet: Bu çalışmada öncelikle Lucas sayılarını kullanarak regüler E matrisi oluşturuldu. Daha sonra bu matris yardımıyla $X(E)$ dizi uzayı tanımlanarak, bu uzayın bir BK-uzayı olduğu ve X uzayı ile izomorf olduğu gösterildi. Ayrıca, $X(E)$ dizi uzayının $1 \le p \le \infty$ şartı altında l_p, c ve c_0 uzaylarıyla ilişkisi incelenerek bazı kapsama bağıntıları verildi.

***Anahtar Kelimeler*:** Lucas sayıları, Regüler matris, Fibonacci sayıları, Dizi uzayı.

An Application On The Lucas Numbers And Infinite Toeplitz Matrices

Absrtact: In this paper, we firstly establish the regular matrix E by using Lucas numbers. Then, by introducing the sequence space $X(E)$ with the help of the matrix E, we show that this space is a BK-space and isomorphic to the space X. Also, we give some inclusion relations by examining the relationship between the space $X(E)$ and the spaces l_p, c ve c_0 for $1 \le p \le \infty$.

***Keywords*:** Lucas numbers, Regular matrix, Fibonacci numbers, Sequence space

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarından birinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir problemi araştırırken kendi adını verdiği Fibonacci sayılarını bulmuştur. Buna göre Fibonacci sayı dizisi $n \ge 2$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Fibonacci tekrarlama bağıntısı kullanılarak, farklı başlangıç koşulları altında yeni sayı dizileri elde edilebilir. Bu sayı dizileri arasında önemli bir yeri olan ve Fransız matematikçi Edward Lucas tarafından tanımlanan Lucas sayı dizisi, Fibonacci sayı dizisinin birçok akrabasından biridir. Lucas sayı dizisi, Fibonacci dizisine benzer bir yolla şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \ge 2$$

Buna göre Lucas sayıları şöyle sıralanır:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \ldots$$

* Corresponding author. *Email address: mkarakas@beu.edu.tr*

Hem Fibonacci hem de Lucas sayı dizilerinin terimlerinin birbirine oranı, "altın oran" olarak adlandırılan ve irrasyonel bir sayı olan 1,61803398... sayısına yakınsamaktadır. Literatürde bu sayı dizilerinin yer aldığı birçok kitap bulunmaktadır [1-3].

Ayrıca bu sayıların bazı temel özellikleri aşağıdaki eşitliklerle verilebilir [2-3].

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n . f_{n+1}, n \geq 1; \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1, n \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} - 1; \sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3$$

w, tüm reel değerli dizilerin uzayı olmak üzere, w'nın her bir lineer alt uzayı dizi uzayı olarak adlandırılır. $n, k \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_k) \in w$ olmak üzere, a_{nk} reel sayılarının bir sonsuz matrisi $A = (a_{nk})$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ise $Ax = (A_n(x))$ yazılır. $\forall x = (x_k) \in X$ için $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise, bu takdirde A matrisi X uzayından Y uzayı içerisine bir matris dönüşümü tanımlar ve bu $A: X \to Y$ şeklinde gösterilir. Bu şekilde tanımlanan tüm A matrislerinin sınıfı $(X : Y)$ ile temsil edilir. A matrisinin tanım bölgesi $X_A = \{x \in w : Ax \in X\}$ şeklinde tanımlıdır ve bir dizi uzayıdır. Eğer A matrisi üçgensel ise X_A ve X uzaylarının lineer izomorf oldukları, yani $X_A \cong X$, kolayca gösterilebilir [4].

Lineer topolojiye sahip bir X dizi uzayı, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n : X \to \mathbb{C}, p_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlanan her bir dönüşümün sürekli olması halinde, K-uzayı adını alır. X uzayı hem K-uzayı hem de tam lineer metrik uzay ise FK-uzayı olarak adlandırılır. Bir K-uzayına Banach uzay olması durumunda BK-uzayı denir [5]. Sırasıyla sınırlı, yakınsak ve 0'a yakınsak dizilerin uzayı olan l_∞, c, c_0 uzayları $\|x\|_\infty = sup_k |x_k|$ normuna göre BK-uzaylarıdır. Elemanlarının p. kuvveti yakınsak olan $l_p, 1 \leq p < \infty$ dizi uzayı ise $\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$ normuna göre bir BK-uzayıdır.

Bir matrisin tanım bölgesi yardımıyla yeni bir dizi uzayı oluşturma yaklaşımı son zamanlarda çeşitli yazarlar tarafından kullanılmıştır. Kara [6], Fibonacci sayılarını kullanarak $l_p(F), 1 \leq p \leq \infty$ dizi uzayını tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik ve geometrik özelliklerini incelemiştir. Kara ve Başarır [7], Fibonacci sayıları yardımıyla yeni bir regüler matris oluşturmuş ve bu matrisin tanım bölgesini araştırmışlardır. Karakaş [8], Fibonacci sayılarından oluşan bir Toeplitz matrisi kullanarak klasik dizi uzaylarının cebirsel ve topolojik özelliklerini vermiştir. Başarır ve diğerleri [9], Fibonacci dizisiyle oluşturulan bir matris yardımıyla $c_0(F), c(F)$ uzaylarını tanıtarak bazı kapsama bağıntıları vermişlerdir. Candan ve Kayaduman [10], genelleştirilmiş Fibonacci fark matrisi yardımıyla bir dizi uzayı tanımlayarak bu uzayı, iyi bilinen bazı uzaylarla karşılaştırmışlar ve tanımladıkları uzayın Schauder bazına sahip olmadığını göstermişlerdir. Alotaibi ve diğerleri [11], $l_p(F)$ Fibonacci fark dizi uzayını kullanarak $(l_1, l_p(F)), 1 \leq p < \infty$ matris sınıflarını karakterize ederek sınırlı lineer operatörlerin normları için bazı yaklaşımlar elde etmişlerdir. Debnath ve Saha [12], yeni bir Fibonacci regüler matrisi yardımıyla $c_0(F), c(F), l_\infty(F)$ uzaylarını oluşturmuş ve bazı cebirsel özellikleri incelemişlerdir.

Çalışmanın asıl amacı, Lucas sayıları yardımıyla regüler bir matris oluşturmak ve bu matrisin tanım bölgesini kullanarak yeni bir dizi uzayı elde ederek, bu uzayın klasik dizi uzaylarıyla olan ilişkisini incelemektir.

2. SONUÇLAR

Temel sonuçlarımıza geçmeden önce, bir matrisin regülerliği için gerek ve yeter şartları veren Toeplitz teoremini ve BK-uzayları ile ilgili Wilansky [13] tarafından verilen teoremi ifade edeceğiz.

Teorem 2.1. Bir $A=\left(a_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç koşulun sağlanmasıdır [7, Lemma 2.1]:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right| \le M, \forall n=1,2,3,\ldots$ eşitsizliğini sağlayan bir $M>0$ sayısı mevcuttur.

ii. $\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0, \forall k=1,2,3,\ldots$

iii. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|=1.$

Teorem 2.2. X uzayı $\|.\|$ normuna göre bir BK- uzayı olsun. Bu takdirde $\forall x\in X_T$ için $\|x\|_T=\|T(x)\|$ olmak üzere X_T bir BK- uzayıdır [13].

Yukarıdaki bilgiler ışığında;

$$L_{nk}=\begin{cases}\dfrac{L_{k-1}^2}{L_n.L_{n-1}+2} & , 1\le k\le n \\ 0 & , k>n\end{cases} \tag{2.1}$$

terimlerine sahip $E=\left(L_{nk}\right)_{n,k=1}^{\infty}$ matrisini tanımlayalım. Bu matrisin terimlerini açtığımızda,

$$E=\begin{bmatrix} \frac{L_0^2}{L_1.L_0+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_2.L_1+2} & \frac{L_1^2}{L_2.L_1+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_3.L_2+2} & \frac{L_1^2}{L_3.L_2+2} & \frac{L_2^2}{L_3.L_2+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_1^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_2^2}{L_4.L_3+2} & \frac{L_3^2}{L_4.L_3+2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{L_0^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_1^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_2^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_3^2}{L_5.L_4+2} & \frac{L_4^2}{L_5.L_4+2} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olup buradan,

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{14} & \frac{1}{14} & \frac{9}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{30} & \frac{1}{30} & \frac{9}{30} & \frac{16}{30} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{4}{79} & \frac{1}{79} & \frac{9}{79} & \frac{16}{79} & \frac{49}{79} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$L_{nn}\neq 0$ ve $k>n$ için $L_{nk}=0$ (n=1,2,3,...) olduğu, yani Lucas matrisimizin üçgensel olduğu yukarıdan görülmektedir. Üstelik Toeplitz teoreminin şartları açıkça sağlanmaktadır. O halde E matrisi bir Toeplitz matrisi yani regüler matristir.

Şimdi $x=(x_k)$ dizisinin $E-$dönüşümü olarak adlandıracağımız $y=(y_k)=E_k(x)$ dizisini

$$y=(y_k)=E_k(x)=\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}L_{i-1}^2 x_i \tag{2.2}$$

şeklinde ve bu dönüşüm yardımıyla Lucas dizi uzayımızı

$$X(E)=\left\{x=(x_k)\in\omega : y=(y_k)\in X\right\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2.3. $X(E)$ Lucas dizi uzayı;

$$\|x\|_{X(E)}=\|E(x)\|_X=\|y\|_X=\begin{cases}\sup_k\left|y_k\right| & , X\in\left\{l_\infty,c,c_0\right\} \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} & , X=l_p;\ 1\le p<\infty\end{cases} \tag{2.3}$$

normuna göre bir BK-uzayıdır.

İspat. E matrisimiz üçgensel olduğundan, (2.3) ve Teorem 2.2 yardımıyla $X(E)$ uzayının bir BK-uzayı olduğu kolayca görülür.

Teorem 2.4. $X(E)$ dizi uzayı X uzayına izometrik izomorftur; yani $X(E) \cong X$ dir.

İspat. İlk olarak,

$$Z: X(E) \to X,\ x \to Zx = y,\ y = (y_k) = E_k(x) = \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{k-1}^2 x_i$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Buradan $\forall x \in X(E)$ için $Zx = y = E(x) \in X$ dır. Ayrıca açıkça görülmektedir ki Z dönüşümü lineerdir ve $Zx = 0 \Rightarrow x = 0$ dır. Yani Z dönüşümü 1:1 dır.

Şimdi $y = (y_k) \in X$ dizisi verilsin. $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \frac{L_k.L_{k-1}+2}{L_{k-1}^2} y_k - \frac{L_{k-1}.L_{k-2}+2}{L_{k-1}^2} y_{k-1}, k \in \mathbb{N}^0 \quad (2.4)$$

eşitliğiyle tanımlayalım. (2.2) ve (2.4) eşitlikleri yardımıyla

$$E_k(x) = \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 x_i$$

$$= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} L_{i-1}^2 \left[\frac{L_i.L_{i-1}+2}{L_{i-1}^2} y_i - \frac{L_{i-1}.L_{i-2}+2}{L_{i-1}^2} y_{i-1}\right]$$

$$= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k} \left[\left(L_i.L_{i-1}+2\right) y_i - \left(L_{i-1}L_{i-2}+2\right) y_{i-1}\right]$$

$$= \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}.(L_k.L_{k-1}+2).y_k = y_k$$

elde edilir. Bu $E(x) = y$ olduğunu gösterir ve $y \in X$ olduğundan $E(x) \in X$ buluruz. Bu takdirde $x \in X(E)$ ve $Zx = y$ olur ki bu Z dönüşümünün örten olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\exists x \in X(E)$ için (2.3) eşitliğinden Z dönüşümünün,

$$\|Zx\|_X = \|y\|_X = \|E(x)\|_X = \|x\|_{X(E)}$$

eşitliğini sağladığı, yani normu koruyan bir dönüşüm olduğu anlaşılır. O halde Z dönüşümü bir izometri olup, $X(E)$ ve X uzayları izometrik izomorftur.

Teorem 2.5. $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ Lucas sayı dizisini göz önüne alalım. Eğer $\left(\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right) \in l_1$ ise, bu takdirde $\sup_i \left(L_{i-1}^2 \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right) < \infty$ olur.

İspat. Teoremi ispat etmek için, $\lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi, yani $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ ve $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$ olmak üzere Mursaleen ve Noman [14] tarafından tanımlanan

$$\Lambda = (\lambda_{nk}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n}, & 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n} \\ 0, & \mathrm{k>n} \end{cases}$$

matrisini kullanacağız. Burada $\lambda_n = L_n.L_{n-1}+2$ alınırsa $\lambda_k - \lambda_{k-1} = L_{k-1}^2$ elde edilir. Bu ise Λ ve E matrislerinin eşitliği anlamına gelir. E matrisinde $\forall n,k \in \mathbb{N}^0$ için $0 < \frac{L_{k-1}^2}{L_n.L_{n-1}+2} < 1$ olduğu açıkça görülmektedir. Benzer durumda Λ matrisi için, $\frac{1}{\lambda} \in l_1$ iken $\sup_k \left((\lambda_k - \lambda_{k-1})\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\right) < \infty$ olduğu göz önüne alınırsa, $E = (L_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi için $\left(\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right) \in l_1$ olduğu kolayca görüleceğinden $\sup_i\left(L_{i-1}^2\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right)<\infty$ bulunur.

Teorem 2.6. $X\subset X(E)$.

İspat. E matrisinin regüler olması nedeniyle $c_0\subset c_0(E)$ ve $c\subset c(E)$ olduğu açıktır. $x=(x_i)\in l_\infty$ alalım. O halde $|x_i|\le T,\ \forall i\in\mathbb{N}$ olacak şekilde bir $T>0$ sabiti mevcuttur. Bu durumda $\forall k\in\mathbb{N}^0$ için,

$$|E_k(x)|\le\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}L_{i-1}^2.|x_i|$$

$$\le\frac{T}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}L_{i-1}^2$$

$$=\frac{T}{L_k.L_{k-1}+2}(L_k.L_{k-1}+2)=T$$

olur ki bu $E(x)\in l_\infty$ olduğunu gösterir. Böylece $x=(x_i)\in l_\infty$ iken $x=(x_i)\in l_\infty(E)$ elde edilir. Son olarak $1<p<\infty$ olsun ve $x=(x_i)\in l_p$ alalım. $\forall k\in\mathbb{N}^0$ için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$|E_k(x)|^p\le\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}|x_i|\right]^p$$

$$\le\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}\right]^p.\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{L_{i-1}^2}{L_k.L_{k-1}+2}\right]^{p-1}$$

$$=\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}L_{i-1}^2|x_i|^p$$

ve bu eşitsizlik yardımıyla da

$$\sum_{k=1}^{\infty}|E_k(x)|^p\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\sum_{i=1}^{k}L_{i-1}^2|x_i|^p$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|x_i|^p L_{i-1}^2\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}$$

elde edilir ve buradan $T=\sup_i\left(L_{i-1}^2\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{L_k.L_{k-1}+2}\right)<\infty$ olmak üzere Teorem 2.5'den

$$\|x\|_{l_p(E)}^p\le T.\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p=T.\|x\|_{l_p}^p$$

bulunur. O halde $x\in l_p(E)$'dir ve $1<p<\infty$ için $l_p\subset l_p(E)$ bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.7. $X(E)\subset X$.

İspat. $\Lambda=E$ ve $\lambda_n=L_n.L_{n-1}+2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}.L_n+2}{L_n.L_{n-1}+2}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{L_n^2}{L_n.L_{n-1}+2}>1$$

bulunur. Böylece Teorem 2.5'den $X(E)\subset X$, $X\in\{l_p,c,c_0\}$, $1\le p\le\infty$ kapsama bağıntısının sağlandığı görülür.

Son olarak $X(E)\subset X$ ve $X\subset X(E)$ bağıntıları aşağıdaki sonucu verir:

Sonuç 2.8. $X(E)=X$.

KAYNAKLAR

[1]. Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. John Wiley & Sons, Inc., Canada, 2001.

[2]. Vajda S., Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications. Dover Publications, Inc., New York, 1989.

[3]. Kalman D., Mena R., The Fibonacci Numbers: Exposed. Mathematics Magazine, 76 (3) 161-187, 2003.

[4]. Başar F., Summability Theory and Its Applications. Bentham e-Books, İstanbul.

[5]. Choudary B., Nanda S., Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, Inc., New Delhi, India, 272-273.

[6]. Kara EE., Some Topological and Geometrical Properties of New Banach Sequence Spaces. J. Inequal. Appl., 2013:38, 15pp., 2013.

[7]. Kara EE., Başarır M., An Application of Fibonacci Numbers into Infinite Toeplitz Matrices. Caspian Journal of Mathematics Sciences, 1 (1) 1-6, 2012.

[8]. Karakaş M., A New Regular Matrix Defined by Fibonacci Numbers and Its Applications. BEU Journal of Science, 4 (2) 205-210, 2015.

[9]. Başarır M., Başar F., Kara EE, On the Spaces of Fibonacci Null and Convergent Sequences. Arxiv, 1309-0150, in press.

[10]. Candan M., Kayaduman K., Almost Convergent Sequence Space Derived by Generalized Fibonacci Matrix and Fibonacci Core. British Journal of Mathematics & Computer Science, 7 (2) 150-167, 2015.

[11]. Alotaibi A., Mursaleen M., Alamri B., Mohiuddine SA, Compact Operators on Some Fibonacci Difference Sequence Spaces. J. Inequal. Appl., 2015:203, 8pp., 2015.

[12]. Debnath S., Saha S., Some Newly Defined Sequence Spaces Using Regular Matrix of Fibonacci Numbers. Afyon Kocatepe University Journal of Science & Engineering, 14 (1) 1-3, 2014.

[13]. Wilansky A., Summability through Functional Analysis. North Holland Mathematics Studies 85, Elseiver Science Publishers, New York, 1984.

[14]. Mursaleen M., Noman AK, On the Spaces of λ Convergent and Bounded Sequences. Thai J. Math., 8 (2) 311-329, 2010.