Cumhuriyet Science Journal
CSJ

e-ISSN: 2587-246X
ISSN: 2587-2680

Cumhuriyet Sci. J., Vol.38-3 (2017) 488-491

Difüzyon Operatörlerinin Özdeğerleri ve Asal Sayılar

Rauf AMİROV*[1], *İbrahim ADALAR*[1]

[1]*Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 58140 Sivas, TÜRKİYE*

Received: 29.05.2017; Accepted: 07.08.2017 *http://dx.doi.org/10.17776/csj.340494*

Özet: Bu makalede, difüzyon operatörlerinin pozitif özdeğerleri ile asal sayılar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, özdeğerleri, asal sayıların dağılımını gösteren Coulomb singularitesine sahip bir Sturm-Liouville problemi önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Ters problem, spektrum, asal sayılar, difüzyon operator, coulomb singularite

Eigenvalues of diffusion operators and Prime numbers

Abstract. In this paper, the relationship between the positive eigenvalues of diffusion operators and prime numbers is investigated. We also propose a Sturm-Liouville problem with Coulomb singularity that shows eigenvalues the distribution of prime numbers.

Keywords: Inverse problem, spectrum, prime numbers, diffusion operator, coulomb singularity

1. GİRİŞ

$$-y''+q(x)y+2\pi N(\lambda)p(x)y=(\pi N(\lambda))^2 y \quad (1.1)$$

$$y(0)=y(1)=0 \quad (1.2)$$

$$N(\lambda)=\lambda,\ \ N(\lambda)=\frac{\lambda}{\ln\lambda} \text{ veya}$$

$$N(\lambda)=li(\lambda):=\int_0^{\lambda}\frac{dt}{\ln t}. \quad (1.3)$$

(1.1)-(1.3) difüzyon operatörlerini ele alalım. Burada, $p(x)\in W_1^1[0,1]$ ve $q(x)\in W_1^0[0,1]=L[0,1]$. $W_1^n[0,1]$ fonksiyon uzayı, $x\in[0,1]$ ve $(m=0,...,n-1)$ olmak üzere, $f^{(m)}(x)$ türevlerinin mutlak sürekli olduğunu ve $f^{(n)}(x)\in L[0,1]$ olduğunu göstermektedir.

$li(x)$ logaritmik integral fonksiyonu, [1,s.228]'de gösterildiği gibi tanımlanmıştır. λ spektral parametredir. Bu problem, $p(x)\equiv 0$ olduğunda, Dirichlet sınır şartı içeren klasik Sturm-Liouville problemine dönüşmektedir.

$N(\lambda)=\lambda$ iken, (1.1)-(1.2) probleminin aşikar olmayan çözümlerini sağlayan λ değerlerine özdeğerler denilmektedir. [2] çalışmasında, $N(\lambda)=\lambda$ olduğu durumdaki problemlerin, ayrık spektruma sahip olduğu

* Corresponding author. *Email address: iadalar@cumhuriyet.edu.tr*

ve $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}/0}$ özdeğerlerinin basit, sayılabilir ve sonlu tanesi dışındakilerinin reel olduğu gösterilmiştir.
Bu çalışmanın ilk amacı, izleyen teoremleri ispatlamaktır.

Teorem 1.1. $N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için $q(x)\notin L[0,1]$.

Teorem 1.2. $N(\lambda)=\dfrac{\lambda}{\ln\lambda}$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için $q(x)\notin L[0,1]$.

Teorem 1.3. $N(\lambda)=li(\lambda)$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için $q(x)\notin L[0,1]$.

Bu teoremlerin ispatları 2. bölümde verilmiştir. Bu ispatlarda, asal sayı teoremi gibi analitik sayılar teorisinde bilinen bazı sonuçlar ve özdeğerlerin asimptotik ifadeleri kullanılmıştır. [3] çalışmasında, "$N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\equiv 0$ olduğunda, özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için $q(x)\notin L[0,1]$." ifadesinin geçerli olduğu gösterilmiştir. Teorem 1.1 ile, [3]'deki bu sonuç geliştirilmiştir.

[4] çalışmasında, "$N(\lambda)=\dfrac{\lambda}{\ln\lambda}$ veya $N(\lambda)=li(\lambda)$ ve $p(x)\equiv 0$ olduğunda, özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için $q(x)\notin L_2[0,1]$." ifadelerinin geçerli oldukları ispatlanmıştır. Teorem 1.2 ve Teorem 1.3 ile, [4]'deki bu sonuçlar geliştirilmiştir.

p_n, n. asal sayı ve $\pi(x)$ fonksiyonu, $p_n\le x$ şartını sağlayan asal sayıların sayısını gösteren fonksiyon olsun. 3. bölümde; $N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\equiv 0$ olduğunda, özdeğerlerinin asimptotik ifadesinde $\pi(n)$ fonksiyonu olan bir problem önerilmiştir. Önerilen bu problemdeki potansiyel fonksiyon, $q(x)=\dfrac{2\pi}{x}+q_1(x)$ şeklinde Coulomb singularitesine sahiptir. Buradaki $q_1(x)\in L_2[0,1]$.

2. TEOREMLERİN İSPATLARI

Asal sayı teoreminin bir sonucu olarak, $\pi(x)$ için, [5],

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{li(x)}=1 \tag{2.1}$$

asimptotik durumlar geçerlidir. $li(x)$ fonksiyonunun, $\dfrac{x}{\ln x}$'den çok daha iyi bir yaklaşım olduğu [6,s.202]'de görülebilir.
(2.1) ile kolayca

$$\pi(p_n)=n\sim\frac{p_n}{\ln p_n} \text{ ve } \pi(p_n)=n\sim li(p_n) \tag{2.2}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $N(\lambda)=\lambda$ olduğunda, $|n|\to\infty$ için, [7, 8 Lemma 3.1],

$$\pi\lambda_n=n\pi+w_0+\frac{w_1}{n\pi}+o(\frac{1}{n}) \tag{2.3}$$

özdeğerlerin asimptotik durumu geçerlidir.

Burada $w_0=\int_0^1 p(x)dx$ ve

$$w_1=\frac{1}{2}\int_0^1\left(q(x)+p^2(x)\right)dx.$$

Teorem 1.1'in İspatı. $N(\lambda)=\lambda$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olsun.
Pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için, $q(x)\in L[0,1]$ var olduğunu kabul edelim. (2.2)'deki ilk ifade ve (2.3) kullanılarak,

$$p_n\sim n\ln n \tag{2.4}$$

$$p_n=n+\frac{w_0}{\pi}+\frac{w_1}{n\pi^2}+o(\frac{1}{n}) \tag{2.5}$$

ifadeleri bulunur. Buradan, (2.4) ve (2.5) asimptotik ifadelerinin çeliştiği görülebilir. Gerçekten de (2.4) ve (2.5) ile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{n+\frac{w_0}{\pi}+\frac{w_1}{n\pi^2}+o(\frac{1}{n})}=\infty$$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.2'nin İspatı. $N(\lambda)=\frac{\lambda}{\ln\lambda}$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olsun.

Pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için, $q(x)\in L[0,1]$ var olduğunu kabul edelim. (2.3) ile,

$$\pi\frac{p_n}{\ln p_n}=n\pi+w_0+\frac{w_1}{n\pi}+o(\frac{1}{n}) \tag{2.6}$$

elde edilir. [9] çalışmasındaki, $x\geq 32299$ için,

$$\pi(x)\geq\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+\frac{1.8}{\ln^3 x}$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{p_n}{\ln p_n}-n=\pi(p_n)\to-\infty \tag{2.7}$$

bulunur. (2.6) ile (2.7) çeliştiğinden ispat biter.

Teorem 1.3'ün İspatı. $k>0$ için,

$$\pi(x)-li(x)>\frac{k\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln\ln x \quad \text{ve}$$

$$\pi(x)-li(x)<\frac{k\sqrt{x}}{\ln x}\ln\ln\ln x$$

eşitsizliklerinin sonsuz sayıda x değeri için sağlandığını, Littlewood, [5 ve 10], göstemiştir. Buradan kolayca [4]'de gösterildiği gibi

$$\limsup_{n\to\infty}(\pi(p_n)-li(p_n))=+\infty \tag{2.8}$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty}(\pi(p_n)-li(p_n))=-\infty \tag{2.9}$$

bulunur.

$N(\lambda)=li(\lambda)$ ve $p(x)\in W_1^1[0,1]$ olduğunda, pozitif özdeğerleri asal sayılar olan (1.1)-(1.2) problemi için, $q(x)\in L[0,1]$ var olduğunu kabul edelim.

(2.3)'den,

$$\lim_{n\to\infty}(\pi li(\lambda_n)-n\pi)=\int_0^1 p(x)dx \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.10) sonucu, (2.8) ve (2.9) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2.1: $H,h\in\mathbb{R}$ olmak üzere, (1.2) Dirichlet sınır koşulları yerine

$y'(0)-hy(0)=y'(1)+Hy(1)=0$

genel sınır şartları alınırsa, aynı yöntemler ile, bu teoremlere benzer sonuçlar elde edilebilir.

3. COULOMB POTANSİYEL İÇİN ÖZDEĞERLER VE $\pi(n)$ SAYILARI

$$-y''+(\frac{2\pi}{x}+q_1(x))y=\lambda^2 y \tag{3.1}$$

$$y(0)=y(\pi)=0 \tag{3.2}$$

problemini ele alalım. Burada, λ bir spektral parametre ve $q_1(x)\in L_2[0,1]$.

(3.1)-(3.2) probleminin özdeğerlerinin asimptotik ifadesi, [11,s.136],

$\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ için,

$$\lambda_n=n-\frac{\ln n}{n}+\frac{w_3}{n}+\frac{a_n}{n}, \tag{3.3}$$

şeklinde gösterilmiştir. Burada, w_3 bir reel sayı ve $a_n\in l_2$.

Diğer taraftan $n\geq 2$ için, [12, Theorem 4],

$$\frac{1}{\pi(n)}=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln n}-\frac{b(n)}{n\ln^2 n}. \tag{3.4}$$

ifadesi geçerlidir. Burada, $\lim_{n\to\infty}b(n)=3$.

(3.3) ve (3.4) ile

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n-\frac{1}{\pi(n)}}=1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left[\lambda_n-(n-\frac{1}{\pi(n)})\right]=0$$

bulunur. Böylece, özdeğerleri (veya özdeğerlerin sonsuz alt kümesi),

$$\lambda_n=n-\frac{1}{\pi(n)} \tag{3.5}$$

eşitliğini sağlayan (3.1)-(3.2) problemi elde edilebilir. Bir başka ifadeyle, (3.5) eşitliğini sağlayacak uygun bir $q_1(x) \in L_2[0,1]$ fonksiyon bulunabilir. Bu durumda, asal sayıların dağılımını gösteren $\pi(x)$ fonksiyonuna,

$$\pi(n) = \frac{1}{n-\lambda_n} \tag{3.6}$$

şeklinde yeni bir yaklaşım elde edilebilir.

Uyarı 3.1: $H, h \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (3.2) Dirichlet sınır koşulları yerine

$y'(0) - hy(0) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

genel sınır şartları alınırsa; [11] çalışmasındaki asimptotikler ile, (3.6)'ya benzer bir yaklaşım verilebilir.

Uyarı 3.2 : (3.1) denklemindeki 2π yerine herhangi $A \in \mathbb{R}_+$ alınırsa, [11,s.136]'daki özdeğerlerin

$$\lambda_n = n - \frac{A}{2\pi}\frac{\ln n}{n} + \frac{w_3}{n} + \frac{a_n}{n}$$

asimptotik ifadesi ve (3.4) denklemi kullanılarak, (3.6)'nın yerine

$$\pi(n) = \frac{A}{2\pi}\frac{1}{n-\lambda_n}$$ denklemi bulunur.

KAYNAKLAR

[1]. M. Abramowitz, I. A. Stegun; Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1972.

[2]. M. G. Gasymov and G. Sh. Guseinov, Determination of diffusion operator on spectral data, Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR, 37(2) (1981), 19-23.

[3]. B. Mingarelli; A note on Sturm-Liouville problems whose spectrum is the set of prime numbers, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2011 (2011), No. 123, 1-4.

[4]. Amirov Rauf; Adalar Ibrahim, Eigenvalues of Sturm-Liouville operators and prime numbers. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 50, 1-3.

[5]. E. Ingham; The distribution of prime numbers, Cambridge Mathematical Librairy, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.

[6]. P. T. Bateman and H. G. Diamond, Analytic Number Theory, World Scientific, Hackensack, NJ, 2004.

[7]. S. A. Buterin and V. A. Yurko, Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions, Journal of Inverse and III-Posed Problems 20 (2012), 855–881.

[8]. Guo, Yongxia, and Guangsheng Wei. "Determination of differential pencils from dense nodal subset in an interior subinterval." Israel Journal of Mathematics 206.1 (2015), 213-231.

[9]. P. Dusart; Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers, Ph.D. thesis. Universite de Limoges, (1998).

[10].J. E. Littlewood; Sur la distribution des nombres premiers, Comptes Rendus 158 (1914),1869-1872.

[11].Amirov RK, Çakmak Y, Gulyaz S: Boundary value problem for second order differential equations with Coulomb singularity on a finite interval. Indian J. Pure Appl. Math. (2006), 37: 125-140.

[12].Panaitopol, L. "A formula for pi(x) applied to a result of Koninck-Ivic." Nieuw Archief voor Wiskunde 1 (2000), 55-56.